**Leçon 158 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.**

Carde : E est un K-ev de dimension finie avec $K = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$.

# 1. Généralités. —

## 1. *Définitions et premières propriétés.* —

- Def : $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si $A^t = A$.
  On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.
- Def : $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite antisymétrique si $A^t = -A$.
  On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
- Def : $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si $\overline{A}^t = A$.
  On note $H_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes.
- Rem : $S_n(\mathbb{R}) \subset H_n(\mathbb{C})$, $iA_n(\mathbb{R}) \subset H_n(\mathbb{C})$.
  $H_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-ev mais pas un $\mathbb{C}$-ev.
- Ex : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{R})$.
- Pro : $dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$, $dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$,$dim_{\mathbb{C}}(H_n(\mathbb{R})) = \frac{n^2}{2}$.
- Pro : $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
  $H_n(\mathbb{C}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus iA_n(\mathbb{R})$.
- Pro : Pour $A \in S_n(\mathbb{R}), H_n(\mathbb{C})$ $Sp(A) \subset \mathbb{R}$.
  Pour $A \subset A_n(\mathbb{R})$, $Sp(A) \subset i\mathbb{R}$.
- Def : On définit $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des $S \in S_n(\mathbb{R})$ tq $X^tSX \geq 0$ $\forall X \in \mathbb{R}^n$.
  On définit $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ tq $X^tSX = 0 \Rightarrow X = 0$.
- Def : On définit $H_n^+(\mathbb{C})$ l'ensemble des $S \in H_n(\mathbb{C})$ tq $\overline{X}^tSX \geq 0$ $\forall X \in \mathbb{C}^n$.
  On définit $H_n^{++}(\mathbb{C})$ l'ensemble des $S \in H_n^+(\mathbb{C})$ tq $\overline{X}^tSX = 0 \Rightarrow X = 0$.
- Rem : Si A est dans $S_n^+(\mathbb{R})$,$H_n^+(\mathbb{C})$, alors $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$.
  Si A est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$,$H_n^{++}(\mathbb{C})$, alors $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

## 2. *Liens avec les endomorphismes et les formes bilinéaires symétriques/hermitiennes.* —

- Def : Une forme bilinéaire symétrique sur un K-ev E est une application $b : E \times E \to K$ telle que $\forall x, y \in E$, $b(x, .)$ et $b(., y)$ sont des formes linéaires, et telle que $b(x, y) = b(y, x)$.
- Def : Une forme sesquilinéaire hermitienne sur un $\mathbb{C}$-ev E est une application $b : E \times E \to K$ telle que $\forall x, y \in E$, $\overline{b(x, .)}$ est une forme linéaire, $b(., y)$ est une forme linéaire et telle que $b(x, y) = \overline{b(y, x)}$.
- Ex : Si E est un $\mathbb{C}$-ev de fonctions de $[0, 1] \to \mathbb{C}$, intégrables, $b(f, g) := \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)dt$ est une forme sesquilinéaire hermitienne.
- Ex : Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $b(X, Y) = X^tY$ est une forme bilinéaire symétrique.
  Pour $X, Y \in \mathbb{C}^n$, $b(X, Y) = \overline{X}^tY$ est une forme sesquilinéaire hermitienne.
- Def : Pour $B = \{e_1, .., e_n\}$ une base de E, et b bili/sesquilin, on définit $Mat(b, B) \in M_n(\mathbb{K})$ par $Mat(b, B)_{i,j} := b(e_i, e_j)$.
- Pro : b est bilin sym réelle ssi $Mat(b, B) \in S_n(\mathbb{R})$.
  b est sesuilinéaire hermitienne ssi $Mat(b, B) \in H_n(\mathbb{C})$.
- Ex : Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$, la différentielle seconde de f est une forme bilinéaire symétrique.
- Pro : Soit b une forme bilin, B,B' deux bases de E.
  alors $Mat(b, B') = P^t.Mat(b, B).P$ où P est la matrice de passage de la base B' vers la base B.
- Def+Pro : Une forme quadratique réelle q sur E est une application de la forme $q(x) = b(x, x)$ pour b une forme bilin sym.
  b est appelée forme polaire de q, et elle est unique. Une forme hermitienne q sur E est une application de la forme $q(x) = b(x, x)$ pour b une forme sesquilin hermitienne.
  b est appelée forme polaire de q, et elle est unique.
- Pro+Def : Soit E un espace vectoriel euclidien ou hermitien de dim finie. Pour tout $f \in End(E)$, il existe $f^* \in End(E)$ tel que $\forall x, y \in E$, $< f(x), y >=< x, f^*(y) >$.
  $f^*$ est appelé l'adjoint de f, est $f \mapsto f^*$ est une involution sur $End(E)$.
  f est dit autoadjoint ssi $f^* = f$.
- Pro : Pour B une base de E, on a $Mat(f^*, B) = Mat(f, B)^t$ si $K = \mathbb{R}$ (resp $\overline{Mat(f, B)}^t$ si $K = \mathbb{C}$).
  Ainsi, les matrices des endomorphismes autoadjoints sont exactement les matrices symétriques (resp hermitiennes), et on a un isomorphisme entre ces deux espaces.

# 2. Réduction et applications. —

## 1. *Théorèmes spectraux.* —

- Thm : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in End(E)$ autoadjoint. Alors il existe une base orthonormée B de vecteurs propres de f.
  Matriciellement, pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :
  $PSP^{-1} = PSP^t = Diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
- Thm : Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $f \in End(E)$ autoadjoint. Alors il existe une base orthonormée B de vecteurs propres de f.
  Matriciellement, pour $S \in H_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $P \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ telle que :
  $PSP^{-1} = PS\overline{P}^t = Diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
- Cor : $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ) ssi $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$ (resp $\mathbb{R}_+^*$).
- Théorème : Soit q une forme quadratique réelle/hermitienne. Alors il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ dans laquelle $q(x_1, .., x_n) = \sum_i \lambda_i x_i.\overline{x_i}$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
- Pro : (Pseudo-réduction simultanée) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
  Il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $PBP^t = I_n$ et $PAP^t$ est diagonale.
- Pro : Pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp $H_n^{++}(\mathbb{C})$), il existe une unique matrice $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp $H_n^{++}(\mathbb{C})$) telle que $S'^2 = S$.
  S' est appelée racine carrée de la matrice S.
- Cor : Ce résultat se généralise à $S_n^+(\mathbb{R})$ et $H_n^+(\mathbb{C})$ et pour tout $\lambda > 0$.

## 2. *Conséquences sur les formes quadratiques et hermitiennes.* —

- Def : On appelle rang d'une forme quadratique/hermitienne le rang de sa forme polaire.
- Def : On dit que deux formes quadratiques/hermitiennes q et q' sont équivalentes ssi il existe deux bases B,B' telles que $Mat(b_q, B) = Mat(b_{q'}, B')$.
- Théorème d'inertie de Sylvester : Si q est une forme quadratique réelle/hermitienne de rang r, alors on a un $0 \leq p \leq r$ tel que q soit équivalente à $x \mapsto x_1^2 + \cdots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + \cdots + x_r^2)$.
  On définit alors la signature de q par $(p, r-p)$, ce couple ne dépendant que de q.
- Pro : Pour q quadratique réelle/hermitienne de signature $(p,s)$ et de forme polaire b. Alors r est le nombre de valeurs propres strictement positives de b comptées avec multiplicités, s est le nombre de valeurs propres strictement négatives de b comptées avec multiplicités, et $n-(r+s)$ est la multiplicité de 0 comme valeur propre de b.
- Cor : Ainsi, une matrice symétrique/hermitienne est positive ssi sa forme quadratique réelle/hermitienne associée est de signature $(n,0)$.
- Cor : Il y a $n+1$ classes d'équivalence de formes quadratiques réelles/hermitiennes de rang n.

3. *Décomposition polaire, norme $|||.|||_2$. —*
   - App : (Décomposition polaire) Pour tout $M \in Gl_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $O, S \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = OS$.
   - Pro : Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $|||S|||_2 = \rho(S) := max(|\lambda_i|)$, où $\rho(S)$ est le rayon spectral de S.
   - Cor : Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $|||M|||_2 = \sqrt{\rho(MM^t)}$
   - **Dev** : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_2$.
   - **Dev** : L'exponentielle de matrice $exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
   - Cor : $exp : H_n \to H_n^{++}$ est aussi un homéomorphisme.

## 3. Applications en analyse. —

1. *Problèmes d'extrema. —*
   - Thm : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.
     Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est un extremum local ssi $D_x(f) = 0$ et $D_x(f)$ est une matrice symétrique définie positive (minimum local) ou définie négative (maximum local).
   - Ex : $f(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$.
2. *Etude locale de surfaces. —*
   - **Dev :** Lemme de Morse : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^3$. Soit $x \in U$ tq $D_x(f) = 0$, et soit $(p,q)$ la signature de la hessienne de f, $D_x^2(f)$.
     Alors il existe un voisinage V de x, W un voisinage de 0, et $g : V \to W$ un $C^1$-difféomorphisme tel que $\forall y \in W$, $f(g^{-1}(y)) = f(x) + y_1^2 + \cdots + y_p^2 - (y_{p+1}^2 + \cdots + y_{p+q}^2)$.
   - App : Equation de la tangente en un point double dans $\mathbb{R}^2$.
   - App : Etude locale d'une surface par rapport à son plan tangent via une forme quadratique.
3. *Résolution de systèmes linéaires. —*
   - Thm : Inégalité de Kantorovich.
   - Thm : Méthode du Gradient à pas optimal.

**Références**


Gourdon : Matrice symétrique/antisym/hermitienne, espaces associés, dimension, propriétés, $H_n(\mathbb{C})$ $\mathbb{R}$-ev, spectre, exemples. Forme bilin sym/sesqui hermitienne, exemple, écriture matricielle, changement de base, lien avec les matrices sym/hermit, formes quadratiques réelles/hermitiennes, forme polaire. Th de réduction dans $S_n(\mathbb{R})$,$H_n(\mathbb{C})$.
FGN (Algèbre 3) : Caractérisation de Sylvester des matrices de $S_n^{++}(\mathbb{R})$, pseudo-réduction simultanée, racine carrée d'une matrice symétrique positive. Réduction simultanée de formes quadratiques.
Caldero,Germoni : Décomposition polaire, homéomorphisme, $|||A|||_2$, $O_n(\mathbb{R})$ sous-groupe compact maximal, $exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ homéo.(Dev), $exp : H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$, $O(p,q)$.
Rouvière : Localisation des extrema locaux d'une fonction $C^2$, Lemme de Morse.(Dev)
Szpirglas : Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.(Dev)
Grifone : Adjoint d'un endom, endom autoadjoints, lien.
Hiriart-Urruty : Inégalité de Kantorovich, Méthode du gradient à pas optimal.


---


*June 3, 2017*



*Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes*